ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИПОТЕЗЫ БИЛА И ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Author: Abdullaev Rustamjon,
Doctor of Economic Sciences, Academician

1. Аннотация. Если в литературных источниках саму «гипотезу Била» называют «обобщенной теоремой Ферма», то уравнение «гипотезы Била», относящееся к теории чисел, в некоторых работах называют обобщенным уравнением Ферма. Поэтому автор статьи изучив эти работы, в данной статье вниманию читателей предлагает множество решений не только уравнения «гипотезы Била», а также эквивалента этой гипотезы, но и уравнения «Последней теоремы Ферма».

2. Ключевые слова. Гипотеза, теорема, «гипотеза Била», уравнение Била, «теорема Ферма», уравнение Ферма, куб, биквадрат, разложение куба, разложение биквадрата, удвоение куба.

3. Введение

3.1. О «гипотезе Била». Уравнение «гипотезы Била», осенью 1994 года, предложенное математиком по образованию и крупным американским предпринимателем Эндрю Билом, для рассмотрения 50-ю математическими журналами, учеными-специалистами и опубликованное на сайте Американского математического общества [1], а также других литературных источниках [2-10], выглядит следующим образом:

$$A^x + B^y = C^z, \tag{1}$$

где через заглавные и строчные буквы A, B, C, x, y и z – обозначены положительные целые числа.

При этом, если положительные целые числа A, B и C должны иметь общий простой делитель (ОПД), то x, y и z > 2.

А в работе [2] и статье Википедии «Beal conjecture» утверждается, что «гипотеза Била» эквивалентна высказыванию, где говориться, что якобы: уравнение (1) **не имеет решений** в натуральных числах и попорно взаимно простых числах A, B и C, если $x, y, z \geq 3$.

Для того, чтобы выразить эту гипотезу и гипотезу Ферма средствами математической логики, соответствующих ISO 31-11 (1992 г.), введем следующие обозначения для высказываний, переменных, формул и уравнений, согласно которым:

A, B и C имеют общий простой делитель – $T = (A, B, C)$;

уравнение Била – $E = (A^x + B^y = C^z)$;

множество решений уравнения Била – $M = \{A_q^{x_k} + B_q^{y_k} = C_q^{z_k}\}$, где $k \in \mathbb{N} \vee \mathbb{N}^*$, $k = \{0, 1, 2, 3 \ldots\} \vee \{1, 2, 3 \ldots\}$ и $q \in \mathbb{N} \vee \mathbb{N}^*, q = \{0, 1, 2, 3 \ldots\} \vee \{1, 2, 3 \ldots\}$.

попорно взаимно простые числа – $P = \{1_1, 2_2, , \ldots, \rho_\rho\}$.

Тогда, если «гипотезу Била» $A^x + B^y = C^z$ можно формализовать следующей формулой:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ E \mid \{A, B, C, x, y, z \in \mathbb{Z}; \mathrm{x, y, z} > 2, T = (A, B, C)\}, \quad (1.1)$$

то якобы эквивалентную к «гипотезе Била» утверждение Даниела Маулдина (Daniel Mauldin), изложенное в его статье [1], можно формализовать следующей формулой:

$$\neg\forall x\ \forall y\ \forall z\ E \mid \{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\} \wedge P(1_1, 2_2, , \ldots, \rho_\rho)\} \quad (1.2)$$

или

$$\neg\forall x\ \forall y\ \forall z\ [E = \{A^x + B^y = C^z\}] \wedge M = \{A_q^{x_k} + B_q^{y_k} = C_q^{z_k}\}. \quad (1.3)$$

3.2. О гипотезе Ферма. Многие математики, никем недоказанную с 1637 года, то есть в течении 387 с лишним лет гипотезу математика-любителя Пьера де Ферма, называют «*Последней теоремой Ферма*». А британский писатель

Саймон Сингх назвал эту теорему даже «*Великой теоремой Ферма*». В тоже время эту гипотезу математики называют частным случаем «гипотезы Била». Поэтому автор статьи доказав тот факт, что «гипотеза Била» имеет множество решений, решил остановится и доказать существование решений и уравнения теоремы Ферма.

В общем виде эта теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта. Дело в том, что Ферма делал свои пометки на полях читаемых математических трактатов и там же сформулировывал пришедшие на ум задачи и теоремы. Теорему, о которой ведётся речь, он записал с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы его можно было поместить на полях книги:

«*Наоборот, невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашёл этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него*» [5].

На этих высказываниях Пьера де Ферма автор решил остановиться ниже, в отдельном разделе данной статьи. Но здесь хочет отметить, что современные математики, это высказывание Ферма свели к уравнению, сформулировав, при этом следующую гипотезу о том, будто бы «Последняя теорема Ферма» утверждает, что якобы никакие три положительные целые числа A, B и C не удовлетворяют уравнению

$$A^{\mathrm{n}} + B^{\mathrm{n}} = C^{\mathrm{n}} \tag{2}$$

для любого целого значения n, больше 2.

Эту гипотезу можно формализовать следующей формулой:

$$\neg(\forall n)E(A^n + B^n = C^n) \wedge \left[\mathrm{M} = \left\{\mathcal{C}_q^n = \mathcal{A}_q^n + \mathcal{B}_q^n\right\}\right] | [n \in \mathbb{N}, n\ > 2] \tag{2.1}$$

4. Материалы и методы

Если выражение (1), то есть $A^x + B^y = C^z$ – это не иначе как уравнение, то согласно определениям об уравнениях, оно должно содержать неизвестные переменные и иметь их корни или решения.

Так оно и есть. Ибо в уравнении $A^x + B^y = C^z$, неизвестными переменными являются, не только x, y и z, но и, как это показано в этой формуле (1), такие переменные, обозначенные как тройка A, B и C. Поэтому ответ на вопрос: есть решение уравнения $A^x + B^y = C^z$ или нет? – приходится находить путем произвольной подстановки в это уравнение положительных целых чисел, на основе вышеуказанных требований, то есть методом подбора значения, а также его частным случаем – методом полного перебора и найти искомые данные, являющиеся решениями рассматриваемого уравнения.

При этом уравнение (1) можно решить тремя способами, поочередно, считая неизвестными переменными: 1) C и z в C^z, когда их значения находят из уравнения $C^z = A^x + B^y$; 2) A и x в A^x, когда их значения находят из уравнения $A^x = C^z - B^y$ и 3) B и y в B^y, когда их значения находят из $B^y = C^z - A^x$. А для этого вместо соответствующих неизвестных переменных необходимо подставить различные положительные целые числа на основе метода подбора значений.

Автор статьи в своей книге «Экономическая логика» [4] вводил обозначение в виде $\int$ для подстановки в формулы различных чисел. Поэтому в этой статье в тех формулах, где возникала необходимость подстановки вместо неизвестных переменных как A^x, B^y и C^z из уравнения (1) таких степенных чисел обозначенных, как: $A_q^{x_k}$, $B_q^{y_k}$ и $C_q^{z_k}$, где $k = \{0, 1, 2, 3 \dots\} \vee \{1, 2, 3 \dots\}$ и $q = \{0, 1, 2, 3 \dots\} \vee \{1, 2, 3 \dots\}$, тогда, приняв известными значения переменных: A^x, B^y, A, B, x и y, если отыскиваются значения переменных C^z, C и z, то такую алгебраическую операцию в общем виде можно записать, следующим образом:

$$\int\limits_{A^x,\, B^y}^{A_q^{x_k}, B_q^{y_k}} A^x + B^y = C^z \Rightarrow \left\{A_q^{x_k} + B_q^{y_k} = C_q^{z_k} \middle| \, C^z = C_q^{z_k}, C = C_q, z = z_k\right\}. \qquad (3)$$

А для других случаев формула (3) видоизменялась, если отыскиваются значения переменных A^x, A и $x,$ то такую алгебраическую операцию в общем виде можно записать, следующим образом:

$$\int\limits_{C^z,\, B^y}^{C_q^{z_k}, B_q^{y_k}} C^z - B^y = A^x \Rightarrow \left\{C_q^{z_k} - B_q^{y_k} = A_q^{x_k} \middle| \, A^x = A_q^{x_k}, A = A_q, x = x_k\right\}. \qquad (4)$$

Если отыскиваются значения переменных B^y, B и $y,$ то такую алгебраическую операцию в общем виде можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{C^z, A^x}^{C_q^{z_k}, A_q^{x_k}} C^z - A^x = B^y \Rightarrow \left\{C_q^{z_k} - A_q^{x_k} = B_q^{y_k} \middle| \, B^y = B_q^{y_k}, B = B_q, y = y_k\right\}. \qquad (5)$$

Теперь можно перейти и к результатам исследования автора данной статьи.

5. Результаты

5.1. Доказательства существования множества решений уравнения «гипотезы Била»

Полученные вышеуказанными способами данные размещались в таблицу Приложения. Однако исследования автора статьи показали, что одно положительное целое число обозначенное через A^x или B^y в левой части уравнения (1), можно было записать множеством степенных чисел. В результате такого положения дел, решения уравнения (1), то есть $A^x + B^y = C^z$, можно, оказывается, записать множеством разнообразных числовых уравнений, составляющих степенные числа, как это показано в следующей части таблицы Приложения, где под номерами № 4, 8, 25 и 38 показаны, всего лишь 4 примера из 47 решений уравнения Била.

Положительные целы числа, найденные путем решения уравнения Била

№	$A^x + B^y = C^z$	ОПД A, B и C	A^x	B^y	C^z
4	**$2^{16} + 2^{16} = 2^{17}$**	**2**	**65536**	**65536**	**131072**
8	**$4^{10} + 16^5 = 8^7$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
22	**$32^8 + 16^{10} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
38	**$27^6 + 1458^3 = 81^5$**	**3**	**387420489**	**3099363912**	**3486784401**

При этом, если обратиться к самой таблице Приложения, то можно увидеть, что если целому положительному числу **65536** под № 4, соответствует всего лишь 3 уравнения, числу **1048576** под № 8 – всего 12, числу **1099511627776** под № 22 – всего 12, то числу **387420489** под № 38 – 5 уравнений.

Для того, чтобы описать такое обстоятельство, если обозначить уравнение (1) через $Y = (A^x + B^y = C^z)$ и $X = \left(A_q^{x_k} \ + \ B_q^{y_k} = C_q^{z_k}\right)$, то можно записать так: $f\colon Y \longrightarrow X_g^r$, где $r = k_1, k_2, \dots k_a$ и $g = b_1, b_2, \dots b_b$. И, можно сказать – это выражение говорить о том, что уравнение Била имеет множество образов.

Автор статьи изучил множество литературных источников, в некоторых из них есть ни только не очень убедительные контрпримеры [1-3, 5-13], которых отдельные математики и авторы статей Википедии называют ошибочными, но и аналитические формулы для решения уравнения Била.

Теорема-1. Для положительных целыхе чисел A, B и C, имеющих общий простой делитель, при x, y, z > 2 уравнение $A^x + B^y = C^z$ имеет множество решений.

Эту теорему можно формализовать следующим образом:

$$\forall x \ \forall y \ \forall z \ [E = \{A^x + B^y = C^z\}] \wedge M = \left\{A_q^{x_k} \ + \ B_q^{y_k} = C_q^{z_k}\right\} \qquad (1.4)$$

Доказательства теоремы-1. Учитывая, что в таблице Приложения автор статьи привел 47 решений уравнения Била, а в этом месте данной статьи он приводить следующую сокращенную, чем члены уравнения (3), формулу решения этого уравнения, доказывающую обоснованность теоремы-1, которая имеет следующий вид:

$$\int_{A_q^{x_k}, B_q^{y_k}}^{10^8,\, 2000^3} A_q^{x_k} + B_q^{y_k} = C_q^{z_k} \Rightarrow \mathbf{10^8 + 2000^3 = 300^4} \blacksquare \tag{6}$$

При этом не сложно заметить, что общим простым делителем чисел A, B и C в выражении (6) является 2. Ибо: $\frac{A=10}{2} = 5$; $\frac{B=2000}{2} = 1000$ и $\frac{C=300}{2} = 150$. Но эти данные не включены в таблицу Приложения.

Кроме того, прежде чем предложить общую аналитическую формулу для определения множества значений уравнения Била $A^x + B^y = C^z$, представляется на рассмотрение читателей еще три уравнения с числовыми значениями в сокращенном виде, чем это было записано в формуле (6), с целью поместить их на этой странице. И так, вот эти формулы:

$$\mathbf{10^{20} + 20000000^3 = 300000^4};$$

$$\mathbf{10^{32} + 200000000000^3 = 300000000^4;}$$

$$\mathbf{10^{44} + 2000000000000000^3 = 300000000000^4}.$$

Теперь можно представить на рассмотрение читателей и общую аналитическую формулу для определения значений переменных в уравнении Била (1). Эту аналитическую формулу можно вывести, записав вышеприведенные решения в следующем упорядоченном и сокращенном виде:

$$\mathbf{10_1^{0+8_0} + 10^0 \cdot 2000_1^{3_0} = 10^0 \cdot 300_1^{4_0}};$$

$$\mathbf{10_2^{12+8_1} + 10^{12} \cdot 2000_1^{3_1} = 10^{12} \cdot 300_1^{4_1}};$$

$$\mathbf{10_3^{24+8_2} + 10^{24} \cdot 2000_1^{3_2} = 10^{24} \cdot 300_1^{4_2}};$$

……………………………………………………;

$$\mathbf{10_q^{12k+8_k} + 10^{12k} \cdot 2000_1^{3_k} = 10^{12k} \cdot 300_1^{4_k}}, \tag{7}$$

где $q = \{1, 2, 3, \dots\}$; $k = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

На суд читателей можно представить и другую формулу, имеющую вид:

$$\int_{A_q^{x_k}, B_q^{y_k}}^{2^3, 2^3} A_q^{x_k} + B_q^{y_k} = C_q^{z_k} \Rightarrow \mathbf{2^3 + 2^3 = 2^4}, \tag{8}$$

где q и k, принимают такие же значения, как и выше.

Для того, чтобы вывести общую аналитическую формулу для решения уравнения Била, следующие решения этого уравнения, полученные на основании использования формулы (8) и записанные в обычном виде:

$$\mathbf{2^3 + 2^3 = 2^4};$$
$$\mathbf{20000^3 + 20000^3 = 2000^4};$$
$$\mathbf{200000000^3 + 200000000^3 = 2000000^4};$$
$$\mathbf{2000000000000^3 + 2000000000000^3 = 2000000000^4};$$
$$\mathbf{20000000000000000^3 + 20000000000000000^3 = 2000000000000^4},$$

можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{(2_1 \cdot 10^0)^3 + (2_1 \cdot 10^0)^3 = (2_1 \cdot 10^0)^4}$$
$$\mathbf{(2_2 \cdot 10^4)^3 + (2_2 \cdot 10^4)^3 = (2_2 \cdot 10^3)^4}$$
$$\mathbf{(2_3 \cdot 10^8)^3 + (2_3 \cdot 10^8)^3 = (2_3 \cdot 10^6)^4}$$
$$\mathbf{(2_4 \cdot 10^{12})^3 + (2_4 \cdot 10^{12})^3 = (2_4 \cdot 10^9)^4}$$
$$\mathbf{(2_5 \cdot 10^{16})^3 + (2_5 \cdot 10^{16})^3 = (2_5 \cdot 10^{12})^4}$$

……………………………………..……………………

$$\mathbf{\left(2_q \cdot 10^{4k}\right)^3 + \left(2_q \cdot 10^{4k}\right)^3 = \left(2_q \cdot 10^{3k}\right)^4}. \tag{9}$$

Таким образом, получив еще одну общую аналитическую формулу (9) для решений уравнения Била (1), теперь можно перейти к доказательствам следующей теоремы.

Теорема-2. **Уравнение «гипотезы Била» $A^x + B^y = C^z$ имеет множество решений в натуральных и попарно взаимно простых числах A, B и C, при условии, когда $x, y, z \geq 3$.**

Эту теорему можно формализовать в следующем виде:

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, E \wedge \left[M = \left\{A_q^{x_k} + B_q^{y_k} = C_q^{z_k}\right\} \mid P = \left\{1_1, 2_2, , \ldots, \rho_\rho\right\}\right], \qquad (1.5)$$

где $E = A^x + B^y = C^z$.

Доказательства теоремы-2. Ниже приводиться уравнение и его решение, составленное на основе формул (3-9), доказывающее теорему-2 и ошибочность утверждений Даниела Маулдина (Daniel Mauldin) [2]. Это уравнение тоже сокращено, чем уравнение (3), чтобы поместить его на данной странице:

$$\int_{A_q^{x_k}, B_q^{y_k}}^{80^{21},\, 87^{20}} A_q^{x_k} + B_q^{y_k} = C_q^{z_k} \Rightarrow \mathbf{80^{21} + 87^{20} = 21429198478298^3} \blacksquare \qquad (10)$$

Кроме этого, предлагаются еще 3 следующие решения уравнения Била (1) в сокращенном виде, чем это было записано даже в формуле (10), по вышеуказанной причине:

$$\mathbf{50^{25} + 57^{25} = 434170501580651^3};$$

$$\mathbf{55^{26} + 67^{21} = 1210997724514610^3};$$

$$\mathbf{29^{33} + 67^{27} = 28000948240770100^3}.$$

В этих формулах значения переменных A, B и C являются не только натуральными числами, но и попарно взаимно простыми числами. Их статус попарно взаимно простых чисел был установлен путем нахождения НОД и НОК этих чисел на калькуляторе сайта skysmart.ru и проверены другими существующими методами и способами, установления такого их статуса.

5.2. Доказательства существования решений уравнения «Великой теоремы Ферма»

Автор статьи отмечает то обстоятельство, что абсолютное большинство математиков утверждают, что «Великая теорема Ферма» якобы была доказана английским математиком сэром Эндрю Джоном Уайлсом [10]. Однако автор данной статьи, ознакомившись с доказательствами этого математика пришел к выводу, что он не сумел доказать «Последнюю теорему Ферма». Поэтому он и решил доказать ошибочность этой гипотезы на основании своих собственных теорем.

Теорема-3. Уравнение теоремы Ферма $\boldsymbol{A^{\mathrm{n}} + B^{\mathrm{n}} = C^{\mathrm{n}}}$ для любого целого числа *n* больше 2 имеет множество решений.

Эту теорему можно выразить следующим образом:

$$\forall n\,[E = \{A^n + B^n = C^n\}] \wedge [\mathrm{M} = \{\mathcal{C}_k^n = \mathcal{A}_k^n + \mathcal{B}_k^n\}] \mid [n \in \mathbb{N}, n > 2] \qquad (2.2)$$

Доказательства теоремы-3. Формула (2.2) означает, что для уравнения (2) существует множество решений при $n \geq 3$. И одно из таких решений автор статьи нашел при значении $n = 3$, когда уравнение $A^{\mathrm{n}} + B^{\mathrm{n}} = C^{\mathrm{n}}$ можно было записать в виде $\mathcal{C}_k^n = \mathcal{A}_k^n + \mathcal{B}_k^n$. Поэтому на основе нахождения и подстановки соответствующих положительных целых чисел на свои места, а также обозначив, что: $A^3 = \mathcal{A}_1^3 = 670000000000000^3$, $B^3 = \mathcal{B}_1^3 = 580000000000000^3$, $C^3 = \mathcal{C}_1^3 = 791511819514367^3$, это уравнение можно записать в виде:

$$\int_n^3 A^n + B^n = C^n \Rightarrow A^3 + B^3 = C^3 \wedge \mathcal{A}_1^3 + \mathcal{B}_1^3 = \mathcal{C}_1^3. \qquad (11)$$

А отсюда следует, что:

$$\int_{n}^{3} A^n + B^n = C^n \Rightarrow A = \sqrt[3]{\mathcal{A}_1^3} = \mathcal{A}_1, B = \sqrt[3]{\mathcal{B}_1^3} = \mathcal{B}_1, C = \sqrt[3]{\mathcal{C}_1^3} = \mathcal{C}_1. \qquad (12)$$

Таким образом, уравнение (2) окончательно можно записать в виде следующего уравнения, подставив в место обозначений $\mathcal{A}_1^3 + \mathcal{B}_1^3 = \mathcal{C}_1^3$ их соответствующие числовые значения:

$$(\mathbf{2000 \cdot 10^{12}})^3 + (\mathbf{1000 \cdot 10^{12}})^3 = \mathbf{2080083823051900^3} \blacksquare \qquad (13)$$

5.3. Биквадрат можно разложить на два биквадрата

Теперь можно вернутся к анализу высказывания или гипотезы Ферма о «*невозможности разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем*». С начала рассмотрим вопрос разложения биквадрата.

Теорема-4. **Можно разложить биквадрат на два биквадрата, то есть одно положительное целое число со степенью 4 можно разлажить на два положительные целые числа со степенью 4.**

Эту теорему можно формализовать в виде:

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ [E = \{C^n = A^n + B^n\}] \land \left[\mathrm{M} = \left\{\mathcal{C}_q^n = \mathcal{A}_q^n + \mathcal{B}_q^n\right\} | n = 2^2 = 4\right] \qquad (2.3)$$

Доказательства теоремы-4. Для того, чтобы доказать эту теорему при значении $n = 2^2$, уравнение $A^{\mathrm{n}} + B^{\mathrm{n}} = C^{\mathrm{n}}$ можно записать в следующем виде $C^{2^2} = A^{2^2} + B^{2^2}$. Поэтому на основе нахождения и подстановки соответствующих положительных целых чисел на свои места, а также произведя обозначения: $C^{2^2} = \mathcal{C}_2^4 = 544808628412873^4, A^{2^2} = \mathcal{A}_2^4 = 400000000000000^4$, $B^{2^2} = \mathcal{B}_2^4 = 500000000000000^4$, это биквадратное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\int_{n}^{4} C^n = A^n + B^n \Rightarrow C^4 = A^4 + B^4 \wedge \mathcal{C}_2^4 = \mathcal{A}_2^4 + \mathcal{B}_2^4. \quad (14)$$

И отсюда следует, что:

$$\int_{n}^{4} C^n = A^n + B^n \Rightarrow C = \sqrt[4]{\mathcal{C}_2^4} = \mathcal{C}_2, A = \sqrt[4]{\mathcal{A}_2^4} = \mathcal{A}_2, B = \sqrt[4]{\mathcal{B}_2^4} = \mathcal{B}_2. \quad (15)$$

Таким образом, подставив в место $\mathcal{C}_2^4$, $\mathcal{A}_2^4$ и $\mathcal{B}_2^4$ их соответствующие числовые значения, уравнение $\mathcal{C}_2^4 = \mathcal{A}_2^4 + \mathcal{B}_2^4$, разлагающее один биквадрат на два биквадрата окончательно можно записать в виде следующего выражения:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_2^4 = 544808628412873_2^4 = (400 \cdot 10^{12})_2^4 + (500 \cdot 10^{12})_2^4}. \quad (16)$$

В качестве примера я привоже еще три уравнения, разлагающего один биквадрат на два биквадрата, то есть подставив в место $\mathcal{C}_k^4$, $\mathcal{A}_k^4$ и $\mathcal{B}_k^4$ их соответствующие числовые значения, уравнение $\mathcal{C}_k^4 = \mathcal{A}_k^4 + \mathcal{B}_k^4$ для $k = 3, 4$ и 5, можно записать следующим образом:

$$\mathcal{C}_3^4 = 779762530865908_3^4 = (600 \cdot 10^{12})_3^4 + (700 \cdot 10^{12})_3^4; \quad (17)$$

$$\mathcal{C}_4^4 = 1016035170368110_4^4 = (800 \cdot 10^{12})_4^4 + (900 \cdot 10^{12})_4^4; \quad (18)$$

$$\mathcal{C}_5^4 = 1252894729119000_5^4 = (1000 \cdot 10^{12})_5^4 + (1100 \cdot 10^{12})_5^4. \quad (19)$$

5.4. О возможности разложить куб на два куба

Теорема-5. Любой куб можно разложить на два куба.

Обозначив через C^3 – разлагаемый куб, а через A^3и B^3 – объемы кубов, полученные после разложении куба C^3, эту теорему можно записать в виде:

$$\forall A\, \forall B\, \forall C[E = \{C^n = \mathrm{A}^n + B^n\}] \wedge \left[\mathrm{M} = \left\{\mathcal{C}_q^n = \mathcal{A}_q^n + \mathcal{B}_q^n\right\} | n = 3\right]. \quad (2.4)$$

Доказательства теоремы-5. Формула (2.4) означает, что разложение куба на два куба имеет множество решений при $n = 3$. И одно из таких решений общего уравнения $C^{\mathrm{n}} = A^{\mathrm{n}} + B^{\mathrm{n}}$ при значении $n = 3$ можно записать в виде уравнения $\mathcal{C}_q^3 = \mathcal{A}_q^3 + \mathcal{B}_q^3$. Поэтому на основе нахождения и подстановки соответствующих положительных целых чисел на свои места и обозначив имеющиеся переменные таким образом, что: $C^3 = \mathcal{C}_6^3 = 208008382305190^3$, $A^3 = \mathcal{A}_6^3 = 100000000000000^3, B^3 = \mathcal{B}_6^3 = 200000000000000^3$, это уравнение можно записать в виде:

$$\int_n^3 C^n = A^n + B^n \Rightarrow \; C^3 = A^3 + B^3 \vee \mathcal{C}_6^3 = \mathcal{A}_6^3 + \mathcal{B}_6^3. \tag{20}$$

И отсюда следует, что:

$$\int_n^3 C^3 = A^3 + B^3 \Rightarrow A = \sqrt[3]{\mathcal{A}_6^3} = \mathcal{A}_6, B = \sqrt[3]{\mathcal{B}_6^3} = \mathcal{B}_6, C = \sqrt[3]{\mathcal{C}_6^3} = \mathcal{C}_6. \tag{21}$$

Таким образом, уравнение (2), то есть $C^3 = A^3 + B^3$ окончательно можно записать в виде следующего уравнения, подставив в место обозначений $\mathcal{C}_6^3, \mathcal{A}_6^3$ и $\mathcal{B}_6^3$ их соответствующие числовые значения:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_6^3 = 208008382305190_6^3 = (100 \cdot 10^{12})_6^3 + (200 \cdot 10^{12})_6^3} \blacksquare \tag{22}$$

Автор статьи решил в качестве примера еще три уравнения, разлагающих один куб на два куба, то есть подставив в место $\mathcal{C}_q^3, \mathcal{A}_q^3$ и $\mathcal{B}_q^3$ их соответствующие числовые значения, уравнение $\mathcal{C}_q^3 = \mathcal{A}_q^3 + \mathcal{B}_q^3$ для $q = 7, 8$ и 9, можно записать в следующих сокращенных видах:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_7^3 = 449794144527539_7^3 = (300 \cdot 10^{12})_7^3 + (400 \cdot 10^{12})_7^3}; \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_8^3 = 698636802781807_8^3 = (500 \cdot 10^{12})_8^3 + (600 \cdot 10^{12})_8^3}; \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_9^3 = 949121995802932_9^3 = (700 \cdot 10^{12})_9^3 + (800 \cdot 10^{12})_9^3}. \tag{25}$$

5.5. Куб можно разложить на два куба путем его удвоения

Есть еще один очень важный и точный способ доказательства возможности разложения куба на два куба связан со следующей античной легендой.

Согласно этой античной легенде [11] однажды на острове Делос разразилась эпидемия чумы. Жители острова обратились к дельфийскому оракулу, и тот сообщил, что необходимо удвоить жертвенник святилища, который имел форму куба. Жители Делоса соорудили второй куб и поставили его на первый, но эпидемия не прекратилась. После повторного обращения оракул разъяснил, что удвоенный жертвенник должен быть единым кубом.

С тех пор *делийской задачей* занимались лучшие математики античного мира и было предложено несколько решений. Однако никто не смог выполнить такое построение, используя только циркуль и линейку, поэтому постепенно сложилось общее убеждение в неразрешимости такой задачи.

Возможно поэтому ещё Аристотель в IV веке до н. э. писал: «**Посредством геометрии нельзя доказать, что… два куба составляют один куб**» [10-12].

Автор статьи полагает, что Ферма свою гипотезу о *невозможности разложить куб на два куба* исчерпал от выше-процитированного утверждения Аристотеля. Однако вопрос удвоения куба был решен еще в античные времена, точнее в IV веке [11-13]. Однако в статье Википедии «Doubling the cube» пишут, что $\sqrt[3]{2}$ «*это не степень двойки, поэтому, исходя из вышеизложенного,* $\sqrt[3]{2}$ *не является координатой конструктивной точки и, следовательно, отрезком прямой* $\sqrt[3]{2}$ *невозможно построить, и нельзя удвоить куб*».

Однако, когда речь идет об иррациональном числе обозначенном через букву Pi, то есть о $\pi = 3{,}1415926535\dots$ таких разговоров не ведут. Хотя это, я бы сказал, иррациональное число и не имеет такого замечательного свойства, как аналогичное число $\sqrt[3]{2}$, связанное с трансформацией этого числа из иррационального в положительное целое число 2, в образе объема куба $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$. Именно поэтому в работах античных и более поздних авторов все сводиться к построению отрезка с длиной $\sqrt[3]{2}$.

А современные авторы и их соавторы в вышеуказанной статье Википедии «Doubling the cube» со ссылкой на Гиппократа Хиосского пишут выражение следующего вида: $r = a \cdot \sqrt[3]{2}$, где a – эта длина ребра куба. Тогда обозначив объем удвоенного куба через C^3, можно записать, что:

$$\mathrm{C}^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2. \qquad (26)$$

При этом следует отметить, что французский математик Пьер Венцель в своей статье [14], опубликованной в 1837 году, доказывал, что с помощью циркуля и линейки не возможно решить такие геометрические задачи. Однако с тех пор прошло много времени, и сейчас, в начале XXI века, можно с уверенностью сказать, что современные специалисты с помощью виртуальных инструментов как циркуль и линейка, могут построить не только отрезок с диной $\sqrt[3]{2}$, но и решить проблему построения самого удвоенного куба в различных чертежных программах, как например, AutoCAD, nanoCAD, A9CAD, в том числе программ, работающих в онлайн режиме, как на сайте tinkercad.com. Более того, они, в качестве доказательства своих решений, могут анимировать свои построения, как это сделано на сайте WIKIMEDIA COMMONS.

Так, что для того, чтобы показать и доказать разложение такого куба на дава куба, введем еще и такие обозначения, где: $\mathrm{C}^3 = C_a^3$ и, $\mathcal{A}_a^3 = \mathcal{B}_a^3 = 1^3$, где $\mathcal{A}_a^3$ и $\mathcal{B}_a^3$ – это объемы кубов, составляющих объем удвоенного куба, обозначенного через $C_a^3 = \mathcal{A}_a^3 + \mathcal{B}_a^3$.

Вопрос об удвоения куба, точнее – удвоения объема такого куба, при $a = 1$, $\mathcal{C}_1^3 = 1^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ и единичных объемах кубов, когда: $\mathcal{A}_1^3 = 1^3$ и $\mathcal{B}_1^3 = 1^3$, можно определить из уравнения $C_1^3 = \mathcal{A}_1^3 + \mathcal{B}_1^3$, следующим образом:

$$\mathcal{C}_1^3 = 2a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2 \cdot 1^3 \vee C_2^3 = 2 \cdot 1^3 = 1 \cdot 1^3 + 1 \cdot 1^3. \qquad (27)$$

Полагаю, что авторы, пытавшиеся решить уравнение Ферма, к вопросу удвоения куба не обращали никакого своего внимания потому, что в этом вопросе основой решения задачи является, во-первых, не положительное целое число, а иррациональное число $\sqrt[3]{2}$. А, **во-вторых, в вопросе удвоении куба**

стояла задача удвоения объема одного или существующего куба, то есть обратная задача, разложению одного куба на два куба.

На основании глубоко изучения данного вопроса можно сформулировать следующую теорему.

Теорема-6. Можно создать бесконечное множество удвоенных кубов. Любой такой куб можно разложить на два куба, то есть удвоит его за счет других двух кубов меньшего размера.

Это утверждение можно формализоввать в виде следующей формулы:

$$\forall a\,\{C_a^n = \mathcal{A}_a^n + \mathcal{B}_a^n\} \wedge \left\{C_a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2a^3\right\} \mid [a = 1, 2, \ldots, \lambda], [n = 3]. \qquad (2.5)$$

Доказательства Теоремы-6. Для того, чтобы доказать обоснованность теоремы-6, формализованную в формуле (2.5), учитывая то обстоятельство, что длина ребра удваемого куба уже принималась равной $a = 1$, теперь, если по очереди вместо длины ребра рассматриваемого куба подставлять ее значения $a = 1, 2, 3, \ldots, \lambda$, то несколько сократив выражение (27) можно получить следующие результаты и обобщенную аналитическую формулу в форме итогового выражения (28):

$$\boldsymbol{C_a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow C_1^3 = 2^1 \cdot 1^3 = 1 \cdot 1^3 + 1 \cdot 1^3};$$

$$\boldsymbol{C_a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow C_2^3 = 2^3 \cdot 2 \cdot 1^3 = 8 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16 \cdot 1^3 = 8 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^3};$$

$$\boldsymbol{C_a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow C_3^3 = 3^3 \cdot 2 \cdot 1^3 = 27 \cdot 2 \cdot 1^3 = 54 \cdot 1^3 = 27 \cdot 1^3 + 27 \cdot 1^3};$$

$$\boldsymbol{C_a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow C_4^3 = 4^3 \cdot 2 \cdot 1^3 = 64 \cdot 2 \cdot 1^3 = 128 \cdot 1^3 = 64 \cdot 1^3 + 64 \cdot 1^3};$$

…………………………………………………………………………………………;

$$\boldsymbol{C_a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow C_{10}^3 = 10^3 \cdot 2 = 10^3 \cdot 2 \cdot 1^3 = 10^3 \cdot 1^3 + 10^3 \cdot 1^3};$$

……………………………………………………………………………………;

$$\boldsymbol{C_a^3 = a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow C_a^3 = 2 \cdot \lambda^3 \cdot 1^3 = 1 \cdot \lambda^3 \cdot 1^3 + 1 \cdot \lambda^3 \cdot 1^3} \blacksquare \qquad (28)$$

6. Выводы

1. Тот факт, что уравнение «гипотезы Била» имеет множество решений, доказывают теоремы-1 и 2, и данные, полученные на основе использования формул (3-10), в том числе данные, приведенные в Приложении.

2. Тот факт, что уравнение «Великой теоремы Ферма» имеет множество решений, доказывают теоремы-3, 4, 5 и 6, и данные, полученных на основании использования формул (11-27).

3. Значение иррационального числа, которая используется в данной статье, как $\sqrt[3]{2}$ в Электронной энциклопедии целочисленных последовательностей, приводится равным: $1{,}259921049894873164767210607278228350570251 4\ldots$

Однако установленный в моих ноутбуках и компьютерах, на такой же технике моих друзей и близких, постоянно обновляемый Microsoft Excel округляет значения этого иррационального числа. А именно до такого значения, когда: $\sqrt[3]{2} \cong 1{,}25992104989487$. Поэтому при возведении этого числа обратно в 3-ю степень, например, в программе Python, появляется результат: $(1{,}25992104989487)^3 = 1{,}9999999999999853 < 2$, то есть возникает очень маленькая, но все же ошибка, равная 1,4654943925052066E-14. Но вообще-то так не должно было быть. Потому, что при возведении в 3-ю степень иррационального числа $\sqrt[3]{2}$, то есть при $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$, тот же Microsoft Excel, Python или другие более точные программы, дают результат точно равный числу 2, то есть $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$.

Аналогичное положение дел характерны и вычислениям, связанным с числом «пи» (π), имеющим на июнь 2022 года 100 триллионов знаков после запятой.

Но Microsoft Excel, такие или аналогичные ошибки выдает и при других случаях и обстоятельствах. Поэтому при проверке результатов автора статьи в других более точных вычислительных машинах, если обнаружатся такие или подобного рода ошибки, необходимо относиться к ним, ни как к его ошибкам, который их проверял и перепроверял неоднократно, а как к ошибкам использованной программы, то есть Microsoft Excel.

7. Список литературы

1. American Mathematical Society. Beal Prize (https://www.ams.org/prizes-awards/paview.cgi?parent_id=41);

2. Daniel Mauldin R. A. Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal conjecture and Prize Problem (https://www.ams.org/notices/199711/beal.pdf);

2. Wikipedia. Beal conjecture (https://en.wikipedia.org/wiki/Beal_conjecture).

4. Абдуллаев Рустамжон (д-р экон. наук, акад.). Экономическая логика. Том 1. [Электронный ресурс]. – М.: Издательство «Перо», 2015. – 270.

5. T. Heath, Diophantus of Alexandria Second Edition, Cambridge University Press, 1910, reprinted by Dover, NY, 1964, pp. 144–145

6. Weisstein, Eric W. "Fermat's Last Theorem." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. (https://mathworld.wolfram.com/FermatsLastTheorem.html).

7. Michael Bennett, Preda Mihailescu and Samir Siksek. The Generalized Fermat Equation (https://personal.math.ubc.ca/~bennett/BeMuSi-Springer-2016.pdf).

8. The ABC's of Number Theory Prof. Noam D. Elkies† Harvard University Cambridge, MA 02138 (https://dash.harvard.edu/bitstream/handle/1/2793857/Elkies%20-%20ABCs%20of%20Number%20Theory.pdf).

9. Michel Waldschmidt. Open Diophantine Problems (https://arxiv.org/abs/math/0312440).

10. By Andrew John Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem (http://www.scienzamedia.uniroma2.it/~eal/Wiles-Fermat.pdf).

11. Прасолов В. В. Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат лит., 1992. — 80 с. ISBN 05-07-014849-0.

12. Henry Mendell. Aristotle and Greek Mathematics (https://plato.stanford.edu/entries/aristotle-mathematics/supplement4.html).

13. Аристотель. Вторая аналитика, часть I, гл. 7. М.: Госполитиздат, 1952.

14. Ванцель, Л. (1837), «Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se resoudre avec la regle et le compas».

8. Приложение. Данные, найденные путем решения уравнения Била

№	$A^x + B^y = C^z$	ОПД $A, B \wedge C$	A^x	B^y	C^z
1	$4^3 + 2^6 = 2^7$	2	64	64	128
2	$4^6 + 2^{12} = 2^{13}$	2	4096	4096	8192
3	$2^{14} + 2^{14} = 2^{15}$	2	16384	16384	32768
4	**$2^{16} + 2^{16} = 2^{17}$**	**2**	**65536**	**65536**	**131072**
5	**$2^{16} + 4^8 = 2^{17}$**	**2**	**65536**	**65536**	**131072**
6	**$4^8 + 4^8 = 2^{17}$**	**2**	**65536**	**65536**	**131072**
7	$2^{18} + 2^{18} = 2^{19}$	2	262144	262144	524288
8	**$4^{10} + 16^5 = 8^7$**	2	**1048576**	**1048576**	**2097152**
9	**$16^5 + 4^{10} = 8^7$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
10	**$32^4 + 16^5 = 8^7$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
11	**$16^5 + 32^4 = 8^7$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
12	**$16^5 + 16^5 = 8^7$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
13	**$4^{10} + 16^5 = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
14	**$16^5 + 4^{10} = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
15	**$16^5 + 16^5 = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
16	**$2^{20} + 2^{20} = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
17	**$4^{10} + 2^{20} = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
18	**$2^{20} + 4^{10} = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
19	**$16^5 + 2^{20} = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
20	**$2^{20} + 16^5 = 2^{21}$**	**2**	**1048576**	**1048576**	**2097152**
21	$4^{14} + 4^{14} = 2^{29}$	2	268435456	268435456	536870912
22	**$4^{20} + 4^{20} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
23	**$4^{20} + 16^{10} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
24	**$16^{10} + 4^{20} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
25	**$32^8 + 16^{10} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
26	**$16^{10} + 32^8 = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
27	**$16^{10} + 16^{10} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
28	**$4^{20} + 16^{10} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
29	**$16^{10} + 4^{20} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
30	**$2^{40} + 2^{40} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
31	**$4^{20} + 2^{40} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
32	**$2^{40} + 4^{20} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
33	**$16^{10} + 2^{40} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
34	**$2^{40} + 16^{10} = 2^{41}$**	**2**	**1099511627776**	**1099511627776**	**2199023255552**
35	$27^3 + 54^3 = 3^{11}$	3	19683	157464	177147
36	$81^3 + 162^3 = 3^{14}$	3	531441	4251528	4782969
37	$243^3 + 486^3 = 3^{17}$	3	14348907	114791256	129140163
38	**$27^6 + 1458^3 = 81^5$**	**3**	**387420489**	**3099363912**	**3486784401**
39	**$27^6 + 1458^3 = 3^{20}$**	**3**	**387420489**	**3099363912**	**3486784401**
40	**$9^9 + 1458^3 = 9^{10}$**	**3**	**387420489**	**3099363912**	**3486784401**
41	**$3^{18} + 1458^3 = 81^5$**	**3**	**387420489**	**3099363912**	**3486784401**
42	**$729^3 + 1458^3 = 243^4$**	**3**	**387420489**	**3099363912**	**3486784401**
43	$27^4 + 162^3 = 9^7$	3	531441	4251528	4782969
44	$3^9 + 54^3 = 3^{11}$	3	19683	157464	177147
45	$3^{12} + 162^3 = 3^{14}$	3	531441	4251528	4782969
46	$3^{15} + 486^3 = 3^{17}$	3	14348907	114791256	129140163
47	$3^{18} + 1458^3 = 3^{20}$	3	387420489	3099363912	3486784401